Depreciación de una máquina industrial

www.matematicasadministracioneconomia.com

Descripción del problema

En una empresa manufacturera, la compra de una **máquina industrial** representa una inversión importante dentro del **presupuesto de capital**. Desde el punto de vista contable y financiero, el valor de este activo disminuye con el tiempo por efecto del uso, desgaste y obsolescencia tecnológica. Este proceso se puede modelar con una **depreciación exponencial continua**, donde el valor del equipo se reduce a una tasa proporcional al valor actual. El problema plantea una función de la forma $V(t) = V_0 e^{-kt}$, donde t es el tiempo en años. El objetivo es calcular el valor del activo después de cierto número de años, determinar la **tasa porcentual de depreciación anual** y encontrar el tiempo necesario para que el equipo pierda la mitad de su valor original. Esto ayuda al área de **finanzas** y **contabilidad** a planificar la reposición de activos, estimar el **valor en libros** y tomar decisiones sobre reemplazos o mantenimiento.

Enunciado

Una empresa compra una máquina industrial por \$80 000. El valor del equipo, en dólares, t años después de la compra está dado por

$$V(t) = 80\,000\, e^{-0{,}18t}.$$

(a) Determine el valor de la máquina después de 5 años. Redondee al dólar más cercano.

(b) Determine la disminución porcentual del valor cada año.

(c) ¿Al cabo de cuánto tiempo el valor de la máquina se reduce a la mitad de su valor original? Aproxime su respuesta a dos decimales.

Solución detallada

Parte (a): valor después de 5 años

Sustituimos $t = 5$ en la fórmula:

$$V(5) = 80\,000e^{-0{,}18\cdot 5} = 80\,000e^{-0{,}9}.$$

Usamos la aproximación

$$e^{-0{,}9} \approx 0{,}4066.$$

Entonces

$$V(5) \approx 80\,000 \cdot 0{,}4066 = 32\,528.$$

Redondeando, el valor de la máquina después de 5 años es de aproximadamente

$$V(5) \approx \$32\,528.$$

Parte (b): disminución porcentual anual

El modelo es de la forma

$$V(t) = V_0 e^{-kt},$$

donde k es la tasa de depreciación continua. En este caso $k = 0{,}18$. La tasa de cambio relativa es

$$\frac{1}{V(t)}\frac{dV}{dt} = -k = -0{,}18.$$

Esto significa que el valor disminuye a una razón del 18 % por año (depreciación continua).

Parte (c): tiempo para que el valor sea la mitad

Queremos encontrar t tal que

$$V(t) = \frac{1}{2}V_0 = \frac{1}{2} \cdot 80\,000 = 40\,000.$$

Planteamos la ecuación:

$$40\,000 = 80\,000e^{-0{,}18t}.$$

Dividimos entre 80 000:

$$\frac{40\,000}{80\,000} = e^{-0{,}18t} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = e^{-0{,}18t}.$$

Aplicamos logaritmo natural en ambos lados:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0{,}18t.$$

Recordamos que $\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2$, así que

$$-\ln 2 = -0{,}18t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln 2}{0{,}18}.$$

Con $\ln 2 \approx 0{,}6931$:

$$t \approx \frac{0{,}6931}{0{,}18} \approx 3{,}85 \text{ años.}$$

Interpretación

El modelo indica que la máquina pierde valor de manera **exponencial**. Después de 5 años vale alrededor de \$32 528, muy por debajo del precio inicial. La tasa de depreciación continua del 18 % anual significa que el valor disminuye rápidamente, lo que puede justificar planificar su reemplazo a mediano plazo. Además, el equipo alcanza la mitad de su valor original en aproximadamente 3,85 años, lo cual es útil para la **contabilización de activos**, el cálculo de **amortizaciones** y la toma de decisiones sobre futuras inversiones en maquinaria.